BAREM clasa a X-a

1. Considerăm cubul cu 3 muchii, de lungime 1, pe axele de coordonate pozitive şi unul din vârfuri în origine .... 1 punct

Fie $P_k(x_k, y_k, z_k)$, $k = 1, 2, \ldots, 2003$ punctele date. E suficient să găsim $n > 2003$ astfel ca

$$x_k, y_k, z_k \notin \left\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n} \right\}$$

.... 3 puncte

Fie, de exemplu, $n \geq 2003$ prim mai mare ca 2003 ce nu este în descompunerea numitorilor coordonatelor raționale ale punctelor P_k (cazul coordonatelor iraționale fiind evident) .... 3 puncte

2. a) $(2 - f(1))(2 + f(2)) = 5$ implică $f(1) = 1$, $f(2) = 3$ .... 1 punct

Inducție: $f(n) = 2n - 1$ .... 1 punct

b) $x_n = \text{arctg}\, f(n)$;

$x_{k+1} - x_k = \text{arctg}\,\frac{1}{2k^2} + p_k \pi$, $p_k \in \mathbf{Z}$ .... 2 puncte

$x_n = \text{arctg}\,(2n-1) + x_1 - \frac{\pi}{4} + l_n \pi$, $l_n \in \mathbf{Z}$ .... 2 puncte

$f(n) = \frac{n(a+1)-1}{a-n(a-1)}$, cu $a = f(1) \neq \frac{n}{n-1}$, $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ .... 1 punct

3. a) $AM \cdot BC \leq BM \cdot AC + CM \cdot AB$ (eventual folosind relația $\sum (z - z_1)(z_2 - z_3) = 0$ .... 3 puncte

Concluzia (eventual cu teorema sinusurilor) .... 1 punct

b) $AA_1 \sin\alpha \leq AB_1 \sin\beta + AC_1 \sin\gamma$ şi analoagele .... 2 puncte

Finalizare .... 1 punct

4. $f(x) = \left(a^x + b^x - c^x - \left(\frac{ab}{c}\right)^x\right) + d^x\left(\left(\frac{ab}{cd}\right)^x - 1\right)$ .... 3 puncte

$a^x + b^x - c^x - \left(\frac{ab}{c}\right)^x = \cdots = c^x\left(\left(\frac{a}{c}\right)^x - 1\right)\left(1 - \left(\frac{b}{c}\right)^x\right)$ .... 2 puncte

$g(x) = d^x\left(\left(\frac{ab}{cd}\right)^x - 1\right)$ strict crescătoare .... 1 punct

$h(x) = c^x\left(\left(\frac{a}{c}\right)^x - 1\right)\left(1 - \left(\frac{b}{c}\right)^x\right)$ strict crescătoare .... 1 punct